ปริมาณเวกเตอร์

เนื่องจากปริมาณบนโลกมีมากมายหลายปริมาณ เช่น อุณหภูมิ ระยะทาง ความสูง น้ำหนัก ความเร็ว อัตราเร็ว ความเร่ง อัตราเร่ง พื้นที่ ปริมาตร มวล แรง ความดัน ความหน่าแน่น การกระจัด ทอร์ก เป็นต้น บางปริมาณเพียงบอกแค่ปริมาณก็เข้าใจแล้ว เช่น ความสูง น้ำหนัก ระยะทาง พื้นที่ จำนวนเงิน อายุ ปริมาตร ปริมาณเช่นนี้ เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์

แต่ปริมาณบางปริมาณ เช่น บ้านมีระยะห่างจากโรงเรียน 5 กิโลเมตร แต่ก็ไม่ทราบว่าระยะห่างนั้น ห่างในทิศทางใด จึงต้องมีทิศทางกำกับไว้ด้วยถึงจะเพียงพอต่อความเข้าใจ ปริมาณเช่นนี้ เรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์

ปริมาณเวกเตอร์ คือ ปริมาณที่มีทั้ง **“ขนาด”** และ **“ทิศทาง”** ถึงจะเพียงพอ ต่อความเข้าใจ

ปริมาณสเกลาร์ คือ ปริมาณที่มีแค่ **“ขนาด”** ก็เพียงพอแล้ว

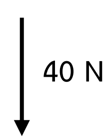
ตัวอย่างปริมาณเวกเตอร์ เช่น ความเร็ว ความเร่ง การกระจัด แรง ทอร์ก

- ความเร็วลม 37 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ไปทางทิศเหนือ
- ความเร่ง 9.8 เมตรต่อวินาที^{2} ในแนวดิ่ง
- การกระจัด 5 กิโลเมตร ไปทางทิศตะวันออก

สัญลักษณ์ของเวกเตอร์ เราสามารถแทนปริมาณเวกเตอร์ด้วย “ลูกศร”

โดยที่ ส่วนของเส้นตรง แทน ขนาดของเวกเตอร์ และหัวลูกศร แทน ทิศทางของเวกเตอร์

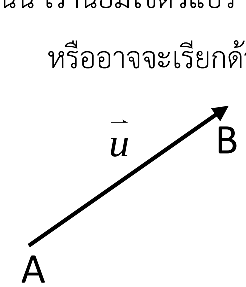
เช่น 3 หน่วยในทิศเหนือ 

40 นิวตันไปทางทิศใต้ 

การเรียกชื่อเวกเตอร์นั้น เรานิยมใช้ตัวแปร $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ในการเรียกชื่อเวกเตอร์

หรืออาจจะเรียกด้วยจุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ก็ได้

เช่น



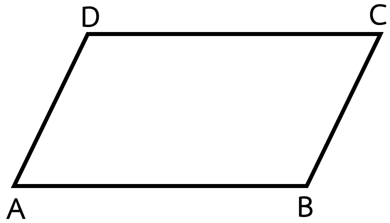
เรียก เวกเตอร์นี้ว่า $\vec{u}$ อ่านว่า เวกเตอร์ ยู

หรือ $\overrightarrow{AB}$ อ่านว่า เวกเตอร์ เอบี

ซึ่งหมายถึง เวกเตอร์ที่เริ่มต้นที่ A และจบที่ B

อย่างที่เรารู้กันว่าเวกเตอร์หนึ่ง ๆ จะประกอบด้วย **“ขนาด”** และ **“ทิศทาง”** ดังนั้น “**ตำแหน่ง**” ของเวกเตอร์ จึงไม่มีความสำคัญ กล่าวคือ เราสามารถเลื่อนเวกเตอร์ไปไหนก็ได้ตราบใดที่ “ขนาด” และ “ทิศทาง” ยังเหมือนเดิม เรียกการเลื่อนทั้งขนาด และทิศทาง แบบนี้ว่า **“การเลื่อนขนาน”**

เช่น

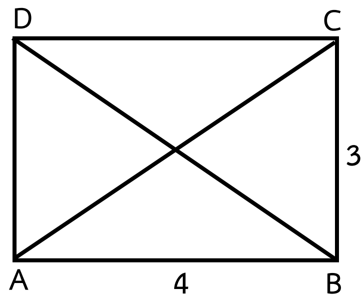


$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

<u>ขนาดของเวกเตอร์</u> จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $|\ |$

เช่น ขนาดของ $\vec{u}$ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|\vec{u}|$ หมายถึง ขนาดของ $\vec{u}$



$|\overrightarrow{AB}| = 4$; $|\overrightarrow{BA}| = 4$

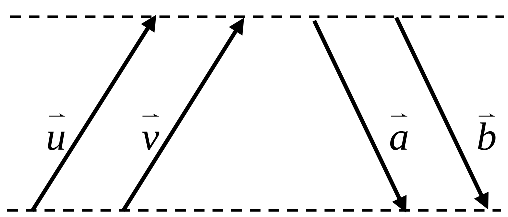
$|\overrightarrow{BC}| = 3$; $|\overrightarrow{CB}| = 3$

$|\overrightarrow{AC}| = 5$; $|\overrightarrow{CA}| = 5$

การเท่ากันของเวกเตอร์

เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ “ขนาด” และ “ทิศทาง” เหมือนกัน

เช่น



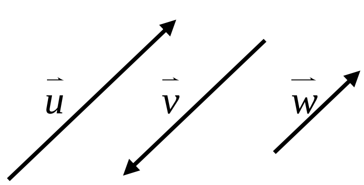
$\vec{u} = \vec{v}$

$\vec{a} = \vec{b}$

การขนานกันของเวกเตอร์

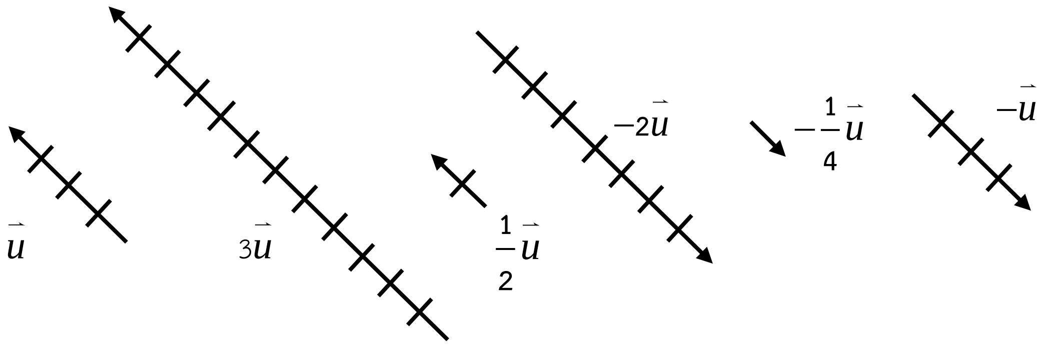
เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะขนานกัน ก็ต่อเมื่อ “ทิศทางเดียวกัน” หรือ “ทิศทางตรงกันข้าม”

เช่น



ทุกเวกเตอร์ ขนานกัน เพราะมีทิศทางเดียวกัน หรือ ตรงข้าม

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์



เวกเตอร์ $3\vec{u}$ หมายถึง เวกเตอร์ในทิศเดียวกับ $\vec{u}$ และมีขนาดเป็น 3 เท่าของ $\vec{u}$

เวกเตอร์ $\frac{1}{2}\vec{u}$ หมายถึง เวกเตอร์ในทิศเดียวกับ $\vec{u}$ และมีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของ $\vec{u}$

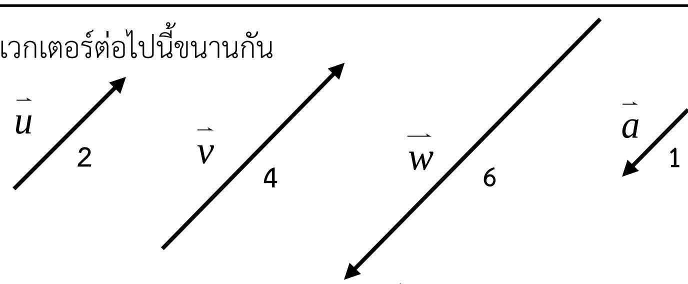
เวกเตอร์ $-2\vec{u}$ หมายถึง เวกเตอร์ในทิศตรงข้ามกับ $\vec{u}$ และมีขนาดเป็น 2 เท่าของ $\vec{u}$

เวกเตอร์ $-\frac{1}{4}\vec{u}$ หมายถึง เวกเตอร์ในทิศตรงข้ามกับ $\vec{u}$ และมีขนาดเป็น 1 ใน 4 ของ $\vec{u}$

เวกเตอร์ $-\vec{u}$ หมายถึง เวกเตอร์ในทิศตรงข้ามกับ $\vec{u}$ และมีขนาดเท่ากับ $\vec{u}$ (นิเสธของเวกเตอร์)

> ดังนั้น $\vec{u}$ กับ $a\vec{u}$ จะขนานกันเสมอ เมื่อ a คือจำนวนจริง (ตัวเลขอะไรก็ได้)
>
> ถ้า $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ เราสามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ได้ว่า $\vec{u} = a\vec{v}$

เช่น ถ้ากำหนดให้เวกเตอร์ต่อไปนี้ขนานกัน



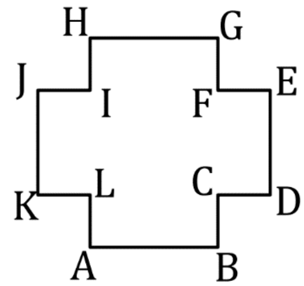
จะได้ว่า $\vec{u} = -2\vec{a}$ หรือ $-\vec{u} = 2\vec{a}$ หรือ $\frac{1}{2}\vec{u} = -\vec{a}$ หรือ $-\frac{1}{2}\vec{u} = \vec{a}$

$2\vec{u} = \vec{v}$ หรือ $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$ หรือ $-\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v}$ หรือ $-2\vec{u} = -\vec{v}$

ความสัมพันธ์ของ $\vec{u}$ กับ $\vec{w}$

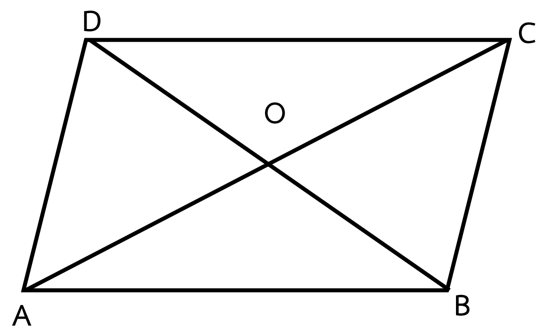
ความสัมพันธ์ของ $\vec{v}$ กับ $\vec{w}$

ตัวอย่างที่ 1 จากรูปจงหาเวกเตอร์ทั้งหมดที่ขนานกับ $\overrightarrow{AB}$



แบบฝึกหัดที่ 1

1. จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จงเขียนเวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ต่อไปนี้



1.1 $\overrightarrow{AB} =$ 　　　1.2 $\overrightarrow{AD} =$

1.3 $\overrightarrow{AO} =$ 　　　1.4 $\overrightarrow{BO} =$

1.5 $\overrightarrow{BA} =$ 　　　1.6 $\overrightarrow{CB} =$

1.7 $\overrightarrow{OA} =$ 　　　1.8 $\overrightarrow{OB} =$

2. จากรูปในข้อ 1 จงเขียนเวกเตอร์ที่ขนานกับเวกเตอร์ต่อไปนี้

2.1 $\overrightarrow{AB} =$ 　　　2.2 $\overrightarrow{AD} =$

2.3 $\overrightarrow{AO} =$ 　　　2.4 $\overrightarrow{BO} =$

3. จากรูปในข้อ 1 จงเขียนเวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกับเวกเตอร์ต่อไปนี้

3.1 $\overrightarrow{AB} =$ 　　　3.2 $\overrightarrow{BC} =$

3.3 $\overrightarrow{AO} =$ 　　　3.4 $\overrightarrow{BO} =$

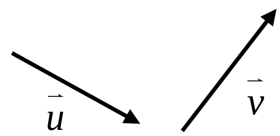
3.5 $\overrightarrow{BA} =$ 　　　3.6 $\overrightarrow{DA} =$

3.7 $\overrightarrow{OA} =$ 　　　3.8 $\overrightarrow{OB} =$

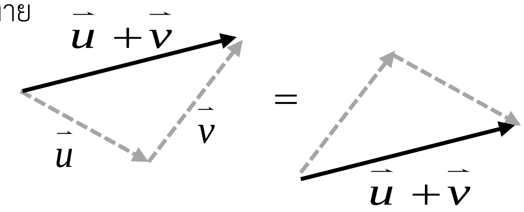
การบวกลบเวกเตอร์

การบวกเวกเตอร์ สามารถทำได้โดยนำเวกเตอร์มาต่อกัน แบบหางต่อหัว หรือหัวต่อหาง เวกเตอร์ผลลัพธ์คือเวกเตอร์ที่ลากจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดสุดท้าย

เช่น

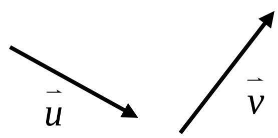


$\vec{u}+\vec{v} =$

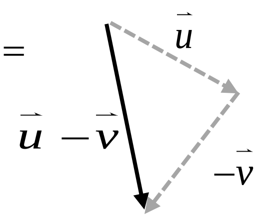


การลบเวกเตอร์ สามารถทำได้เช่นเดียวกับการบวก แต่ต้องบวกด้วยเวกเตอร์ตัวลบที่กลับทิศ

เช่น

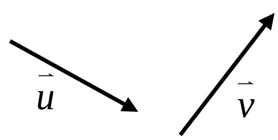


$\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v}) =$

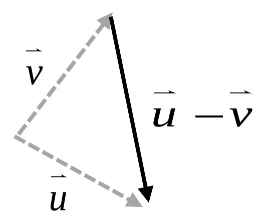


การลบเวกเตอร์อีกวิธี คือ นำหางมาต่อกัน ผลลัพธ์คือเวกเตอร์ที่ลากจากเวกเตอร์**ตัวลบ**ไปยัง**ตัวบวก**

เช่น

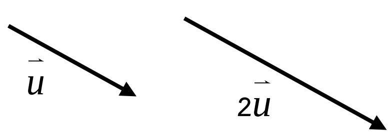


$\vec{u}-\vec{v} =$

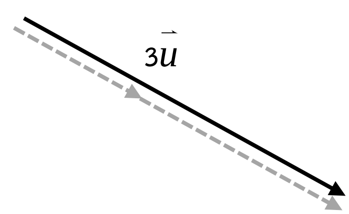


เวกเตอร์ที่ขนานกัน เมื่อบวกลบกัน สามารถนำตัวเลขมากระทำกันได้เลย

เช่น



$\vec{u} + 2\vec{u} =$

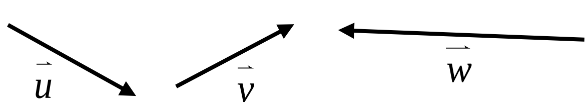


เช่น $5\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} = \frac{9}{2}\vec{u}$

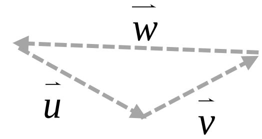
เช่น $2\vec{v} - 4\vec{v} = -2\vec{v}$

เวกเตอร์ศูนย์ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์

เช่น

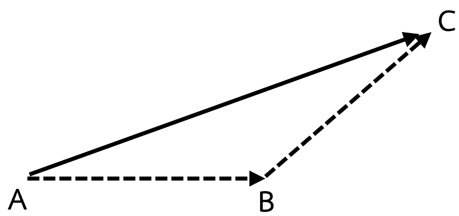


$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} =$

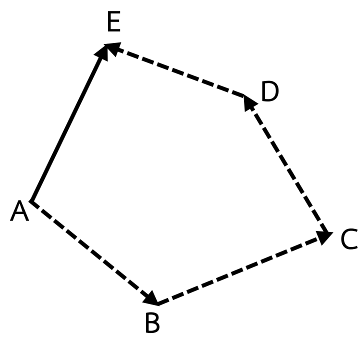


$= \vec{0}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกของเวกเตอร์ต่อไปนี้



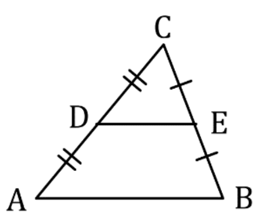
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} =$

ตัวอย่างที่ 3 สามเหลี่ยม ABC มี $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ และมี $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ ให้ CD เป็นเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยม ABC จงหา $\overrightarrow{CD}$ ในรูปของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

ตัวอย่างที่ 4 จากรูปจงพิสูจน์ว่าส่วนของเส้นตรง DE ขนาน และยาวเป็นครึ่งหนึ่งของส่วนของเส้นตรง AB



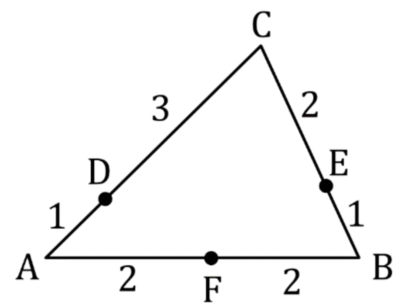
ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน ถ้า $a(\vec{u}+\vec{v})-\vec{u} = b(\vec{u}-\vec{v})$ แล้ว จงหา $a-b$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน $\vec{w} = (a+b+1)\vec{u} + (1-b)\vec{v}$ และ $\vec{s} = \vec{u} + (a+b)\vec{v}$ ถ้า $\vec{w} = 2\vec{s}$ แล้ว $a+b$ มีค่าเท่าใด

ตัวอย่างที่ 7 ให้ $\vec{u} \neq \vec{0}$ และ $\vec{v} \neq \vec{0}$ และ $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$ จงหาจำนวนจริง x และ y ที่ทำให้ $(x-1)\vec{u} + (3-y)\vec{v} = \vec{0}$

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ และ $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$



1.1 $\overrightarrow{AF}$

1.2 $\overrightarrow{AD}$

1.3 $\overrightarrow{DC}$

1.4 $\overrightarrow{CA}$

1.5 $\overrightarrow{BF}$

1.6 $\overrightarrow{BC}$

1.7 $\overrightarrow{BE}$

1.8 $\overrightarrow{CE}$

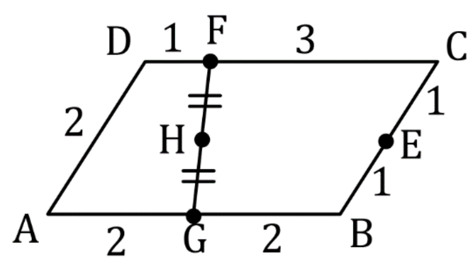
1.9 $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$

1.10 $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$

1.11 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

1.12 $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$

2. จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{u}$ และ $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{v}$ จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$



2.1 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

2.2 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

2.3 $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

2.4 $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$

2.5 $\overrightarrow{GF}$ 2.6 $\overrightarrow{HG}$

2.7 $\overrightarrow{AH}$ 2.8 $\overrightarrow{HE}$

3. กำหนด $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ และ $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$ ถ้า $x\vec{u} + (3x-1)\vec{v} = (2y+1)\vec{u} - 6y\vec{v}$ แล้ว $y + \frac{1}{4}x$ เท่ากับเท่าใด

4. กำหนดให้ $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ และ x เป็นจำนวนจริง ซึ่งทำให้ $8\vec{u} - 3x\vec{v} = 10\vec{u} + (2x^2 - 9)\vec{v}$ เป็นจริง จงหาเซตของจำนวนจริง x ซึ่งทำให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ขนานกันและทิศทางตรงกันข้าม

5. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ และ E เป็นจุดที่ทำให้ $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{BA}$ ให้ $\overrightarrow{BC} = \vec{u}$ และ $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ จงหาเวกเตอร์ $\overrightarrow{BE}$ ในรูปของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

6. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี D เป็นจุดบนด้าน AC และ F เป็นจุดบนด้าน BC ถ้า $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{DF} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BC}$ แล้ว $\frac{a}{b}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

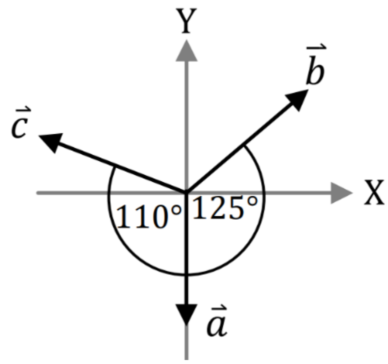
[PAT1 (ต.ค.52)/2-12]

7. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน M เป็นจุดบนด้าน AD ซึ่ง $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ และ N เป็นจุดบนเส้นทแยงมุม AC ซึ่ง $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ ถ้า $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$ แล้ว $a+b$ เท่ากับเท่าใด

[PAT1 (มี.ค52)/24]

8. กำหนด จุด A(3,0) , B($3+\sqrt{3}$, 1) และ C(a,b) โดยที่ C อยู่ในจตุภาคที่ 4 $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{AC}$ ทำมุมกัน 60° และ $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\sqrt{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|$ จงหาค่าของ a^2+b^2 [PAT1 (ธ.ค54)/33]

9. จากรูป $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$



ข้อใดต่อไปนี้ ถูกต้อง **[PAT1 (ธ.ค.54)/12]**

1. $\left|\vec{a}\right|\operatorname{cosec}35^\circ=\left|\vec{c}\right|\left(1+\dfrac{\cot 20^\circ}{\cot 35^\circ}\right)$

2. $\left|\vec{a}\right|\operatorname{cosec}20^\circ=\left|\vec{c}\right|\left(1+\dfrac{\cot 35^\circ}{\cot 20^\circ}\right)$

3. $\left|\vec{a}\right|\operatorname{cosec}35^\circ=\left|\vec{c}\right|\left(1+\dfrac{\tan 20^\circ}{\tan 35^\circ}\right)$

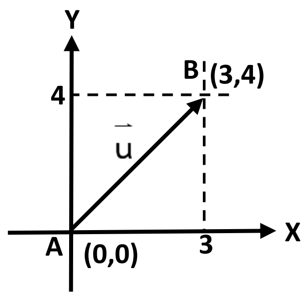
4. $\left|\vec{a}\right|\operatorname{cosec}20^\circ=\left|\vec{c}\right|\left(1+\dfrac{\tan 35^\circ}{\tan 20^\circ}\right)$

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

ในเนื้อหาที่ผ่านมา เราจะแทนเวกเตอร์ด้วย “ลูกศร” ซึ่งไม่สะดวกในการคำนวน เราจะนำเวกเตอร์ที่แทนด้วยลูกศร ไปวาดลงในระบบพิกัดฉาก

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ จะมี 2 แกนคือ **แกน X** และ **แกน Y** โดยเราจะใช้ “เมทริกซ์” แทนเวกเตอร์ ซึ่งสมาชิกในหลักที่หนึ่งของเมทริกซ์คือ “ระยะทางแกน X” และ “ระยะทางแกน Y” ตามลำดับ

เช่น เวกเตอร์ที่ชี้จาก**จุด** A(0,0) ไปยัง**จุด** B(3,4)



เวกเตอรนี้ ชื่อว่า $\vec{u}$ หรือ $\overrightarrow{AB}$ หรือ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

ขนาดของเวกเตอร์จะสามารถให้ได้จาก “ทฤษฎีบทพีทาโกรัส”

ความชันของเวกเตอร์

ดังนั้น ขนาดของ $\vec{u}$ หรือ $\overrightarrow{AB}$ หรือ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ และ $m\vec{u} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4-0}{3-0} = \dfrac{4}{3}$

ขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ

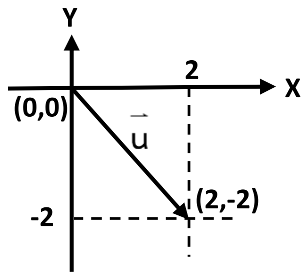
กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ขนาดของ $\vec{u}$ คือ $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

ความชันของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ

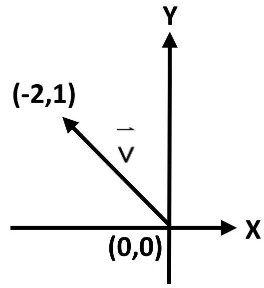
ความชันของเวกเตอร์ที่เริ่มต้นจาก **จุด**(x_1, y_1) ไปยัง **จุด**(x_2, y_2) คือ $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

หรือถ้า $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ความชันของ $\vec{u}$ คือ $\dfrac{b}{a}$ ความชันของเวกเตอร์ $\vec{u}$ เขียนแทนด้วย $m\vec{u}$

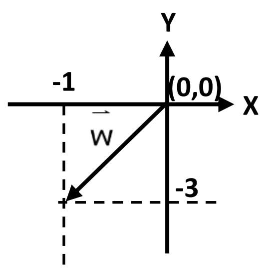
ตัวอย่างที่ 8 จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ พร้อมทั้งหาขนาด



$\vec{u}=\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$ $\quad |\vec{u}|=$ $\quad m\vec{u}=$



$\vec{v}=\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$ $\quad |\vec{v}|=$ $\quad m\vec{v}=$

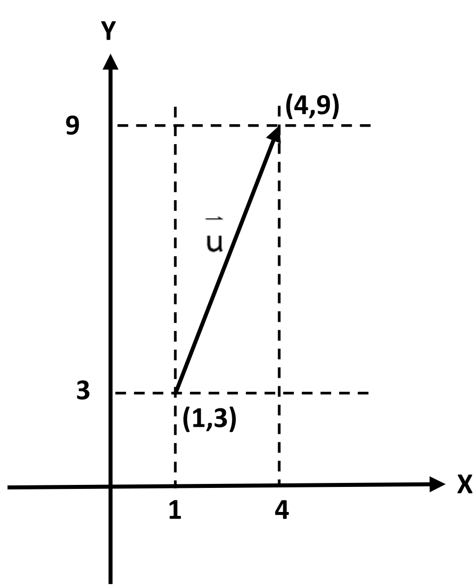


$\vec{w}=\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$ $\quad |\vec{w}|=$ $\quad m\vec{w}=$

หากเวกเตอร์ไม่ได้เริ่มที่**จุดกำเนิด** (0,0) เราจะมีวิธีหา**ระยะทางแกน** X และ**ระยะทางแกน** Y ดังนี้

เวกเตอร์ที่เริ่มต้นจาก **จุด**(x_1, y_1) ไปยัง **จุด**(x_2, y_2) คือ $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

เช่น



$\vec{u}=\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$

$|\vec{u}|=$

$m\vec{u}=$

ตัวอย่างที่ 9 จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ พร้อมทั้งหาขนาด

เวกเตอร์จาก A(1,-2) ไปยัง B(-1,0) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$ $\left|\overrightarrow{AB}\right| =$ $m\overrightarrow{AB} =$

เวกเตอร์จาก C(8,8) ไปยัง D(10,18) $\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$ $\left|\overrightarrow{CD}\right| =$ $m\overrightarrow{CD} =$

เวกเตอร์จาก E(-2,3) ไปยัง F(1,-4) $\overrightarrow{EF} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$ $\left|\overrightarrow{EF}\right| =$ $m\overrightarrow{EF} =$

เวกเตอร์จาก G(-4,3) ไปยัง H(-5,-2) $\overrightarrow{GH} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$ $\left|\overrightarrow{GH}\right| =$ $m\overrightarrow{GH} =$

ถ้าความชันเท่ากัน แสดงว่า เวกเตอร์นั้นขนานกัน

การบวกลบเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ

กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ $\therefore\ \vec{u} \pm \vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \pm c \\ b \pm b \end{bmatrix}$

นิเสธของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ

กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ นิเสธของ $\vec{u}$ คือ $-\vec{u} = -\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ศูนย์ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ คือ $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (เวกเตอร์ศูนย์ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์)

การคูณเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ ด้วยสเกลาร์

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใดๆ

กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $\quad \therefore \alpha\vec{u} = \alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$

การเท่ากันของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ

เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ “ขนาด” และ “ทิศทาง” เหมือนกัน

กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ถ้า $\vec{u} = \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ นั่นคือ $a = c$, $b = d$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่า x และ y ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} 2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+1 \\ 3 \end{bmatrix}$

การขนานกันของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ

นอกจากเราจะใช้ความชันของเวกเตอร์มาตรวจสอบว่าเวกเตอร์นั้นขนานกันหรือไม่ เรายังสามารถใช้อีกวิธี นั่นคือ การใช้สมการความสัมพันธ์ของเวกเตอรที่ขนานกัน

ถ้า $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ เราสามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ได้ว่า $\vec{u} = a\vec{v}$

หาก $a > 0$ ขนานกันแบบ “ทิศเดียวกัน”

หาก $a < 0$ ขนานกันแบบ “ทิศตรงข้าม”

ตัวอย่างที่ 11 จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ต่อไปนี้ขนานกันหรือไม่

$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

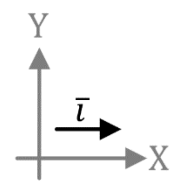
$\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

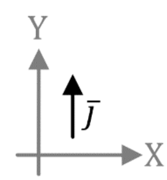
$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกน X และแกน Y

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยคือเวกเตอร์ที่**มีขนาดหนึ่งหน่วย** ไม่ว่าเวกเตอร์นั้นจะมีทิศทางใดก็ตาม



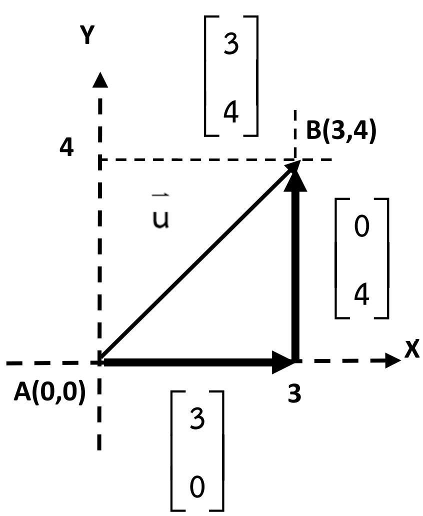


กำหนดให้ $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกน X

กำหนดให้ $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกน Y

เราสามารถเขียนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ในรูปของ $\vec{i}, \vec{j}$ ได้ดังนี้ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j}$

เช่น



ดังนั้น $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ

กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ $\vec{u} \neq \vec{0}$ แล้ว

เวกเตอร์ **<u>หนึ่งหน่วย</u>** ที่มี**<u>ทิศเดียว</u>**กับ $\vec{u}$ คือ $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ **<u>k หน่วย</u>** ที่มี**<u>ทิศเดียว</u>**กับ $\vec{u}$ คือ $\frac{k}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{k}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

***** ถ้าอยากได้ทิศตรงข้าม ให้คูณด้วย -1 เข้าไป**

ตัวอย่างที่ 12 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศเดียวกับ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 13 จงหาเวกเตอร์สามหน่วยในทิศเดียวกับ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 14 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศตรงข้ามกับ $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 15 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศตรงข้ามกับเวกเตอร์ที่ชี้จาก **จุด(-4,3)** ไปยัง **จุด(1,2)**

แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงหาเวกเตอร์ที่ลากระหว่างจุดต่อไปนี้

   1.1 จาก **A(1,3)** ไปยัง **B(3,9)**

   1.2 จาก **C(1,-1)** ไปยัง **D(-1,1)**

   1.3 จาก **F(1,2)** ไปยัง **E(3,4)**

   1.4 จาก **O(2,3)** ไปยัง **M(1,2)**

   1.5 จาก **W(-5,1)** ไปยัง **Y(3,-2)**

   1.6 จาก **P(-2,-3)** ไปยัง **L(5,6)**

   1.7 จาก **H(-5,2)** ไปยัง **G(-3,-2)**

   1.8 จาก **U(-1,-3)** ไปยัง **K(-3,-9)**

2. จงหาจุดต่อไปนี้

   2.1 กำหนด $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $A(3,4)$ จงหา B

2.2 กำหนด $\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $C(2,3)$ จงหา D

2.3 กำหนด $\overrightarrow{EF} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$ และ $F(3,-4)$ จงหา E

2.4 กำหนด $\overrightarrow{GH} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ และ $H(-5,6)$ จงหา P

3. จงหา a , b ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} a+3 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b \\ -1 \end{bmatrix}$

4. จงหา a , c ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} c^2 - c - 72 \\ 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}$

5. จงหาเวกเตอร์ต่อไปนี้

5.1 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$

5.2 $\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$

5.3 $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix} =$

5.4 $\begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} =$

5.5 $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \end{bmatrix} =$

5.6 $\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} =$

6. กำหนด A(1,2) , B(2,3) , C(5,6) จงหา $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

7. กำหนด A(1,2) , B(3,5) , C(-2,4) , D(3,-5) จงหา $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

8. กำหนด $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}$ จงหา

8.1 $2\vec{u} + 3\vec{v}$

8.2 $3\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{w}$

8.3 $2\overrightarrow{v}+5\overrightarrow{w}$

8.4 $2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}-5\overrightarrow{w}$

8.5 $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}+\frac{1}{3}\overrightarrow{v}-\frac{1}{4}\overrightarrow{w}$

9. เวกเตอร์ต่อไปนี้เวกเตอร์ใดบ้างที่ขนานกัน

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\-6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-\frac{3}{2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

10. จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

10.1 $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

10.2 $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

10.3 $\begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix}$

10.4 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

10.5 $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

10.6 $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

10.7 $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

10.8 $2\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

11. จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของ $\vec{i}, \vec{j}$

11.1 $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

11.2 $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

11.3 $\begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix}$

11.4 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

11.5 $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

11.6 $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

12. กำหนด A(1,2) , B(3,4) , C(6,7) จงหา $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|$

13. กำหนด $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ จงหา $\left|\overrightarrow{AC}\right|$

14. กำหนด $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ จงหา $\left|\overrightarrow{BC}\right|$

15. กำหนด $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix}$ จงหาเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ $\vec{i}, \vec{j}$

15.1 $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

15.2 $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

15.3 $2\vec{u} + 3\vec{v} - 5\vec{w}$

15.4 $\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{1}{4}\vec{w}$

16. ถ้า $\vec{u} = a\vec{i} + 12\vec{j}$ และ $\left|\vec{u}\right| = 13$ จงหา a

17. ถ้า $\vec{v} = 15\vec{i} + m\vec{j}$ และ $|\vec{v}| = 25$ จงหา m

18. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ $3\vec{i} + 4\vec{j}$

19. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $6\vec{i} + 8\vec{j}$

20. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับเวกเตอร์ $2\vec{i} + \vec{j}$

21. จงหาเวกเตอร์ $\sqrt{5}$ หน่วยที่ขนานกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

22. กำหนด P(2,-1) , Q(-2,1) จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$

23. จงหา a,b เมื่อกำหนดให้ $a\vec{i}+3\vec{j}=5\vec{i}+b\vec{j}$

24. จงหา a,b เมื่อกำหนดให้ $4a\vec{i}-3\vec{j}=2(3\vec{i}-4b\vec{j})$

25. จงหา a,b เมื่อกำหนดให้ $5\vec{i}-8\vec{j}=a(3\vec{i}-2\vec{j})-b(2\vec{i}+\vec{j})$

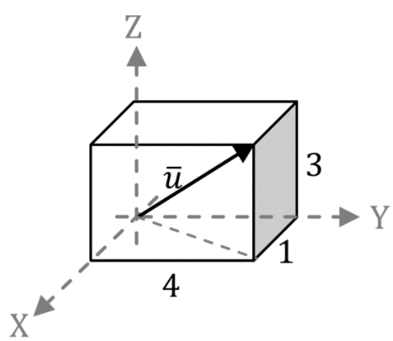
26. ถ้า $a\vec{i}+4\vec{j}$ ขนานกับ $9\vec{i}+6\vec{j}$ จงหา a

27. กำหนด $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ และ $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ ถ้า $\overrightarrow{AB} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$ และพิกัดของจุดA คือ **(-1,0)** จงหา**พิกัดของ B**

ในเนื้อหาที่ผ่านมา นักเรียนได้เรียนเกี่ยวกับเวกเตอร์ 2 มิติ ไปแล้ว นั้นคือเวกเตอร์ที่สามารถบอกได้ด้วย ระยะทางแกน X และ ระยะทางแกน Y ซึ่งเวกเตอร์แบบ 2 มิตินี้ จะบอกเราได้แค่ความกว้าง และความยาว แต่ในกรณีที่มี ความลึก หรือ ความสูง เข้ามาเกี่ยวข้อง จะจัดเป็นเวกเตอร์แบบสามมิติ หรือเรียกเต็ม ๆ ว่า เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ จะมี 3 แกนคือ **แกน X แกน Y** และ **แกน Z** โดยเราจะใช้ “เมทริกซ์” แทนเวกเตอร์ ซึ่งสมาชิกในหลักที่หนึ่งของเมทริกซ์ คือ “ระยะทางแกน X” “ระยะทางแกน Y” และ “ระยะทางแกน Y” ตามลำดับ

เช่น



$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \therefore |\vec{u}| =$$

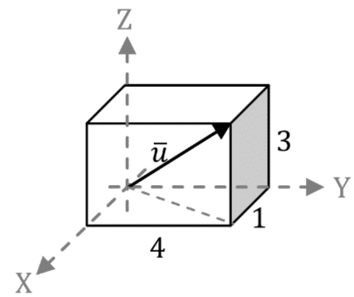
ขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ขนาดของ $\vec{u}$ คือ $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + C^2}$

ความชันของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

ความชันของเวกเตอร์ที่เริ่มต้นจาก **จุด**(x_1, y_1, z_1) ไปยัง **จุด**(x_2, y_2, z_2) หาได้จากการเทียบแกน โดยจะเทียบแกนเป็นคู่ ๆ 3 คู่ โดยแต่ละคู่ก็จะคิดความชันเช่นเดียวกับเวกเตอร์ 2 มิติ

เช่น



$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ความชันเทียบแกน X **และ** Y คือ $\frac{4}{1} = 4$

ความชันเทียบแกน Y **และ** Z คือ $\frac{3}{4}$

เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะขนานกัน
เมื่อความชันที่เทียบแกนเหมือนกัน ความชันเท่ากัน

ความชันเทียบแกน X **และ** Z คือ $\frac{3}{1} = 3$

เวกเตอร์ที่ขนานกันในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

สามารถหาได้ ถ้า $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ เราสามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ได้ว่า $\vec{u} = a\vec{v}$

หาก $a > 0$ ขนานกันแบบ “ทิศเดียวกัน”

หาก $a < 0$ ขนานกันแบบ “ทิศตรงข้าม”

ตัวอย่างที่ 16 $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$ ขนานกันหรือไม่

ตัวอย่างที่ 17 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ ขนานกันหรือไม่

ตัวอย่างที่ 18 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ขนานกันหรือไม่

หากเวกเตอร์ไม่ได้เริ่มที่**จุดกำเนิด** เราจะมีวิธีหา**ระยะทางแกน** X **ระยะทางแกน** Y และ**ระยะทางแกน** Z ดังนี้

เวกเตอร์ที่เริ่มต้นจาก **จุด**(x_1, y_1, z_1) ไปยัง **จุด**(x_2, y_2, z_2) คือ $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 19 จงหาเวกเตอร์ที่ชี้จาก**จุดA(2,-1,0)** ไปยัง**จุดB(0,-2,3)**

การบวกลบเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

กำหนดให้ $\vec{u}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \vec{v}=\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ $\quad \therefore\ \vec{u} \pm \vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \pm d \\ b \pm e \\ c \pm f \end{bmatrix}$

นิเสธของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

กำหนดให้ $\vec{u}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ นิเสธของ $\vec{u}$ คือ $-\vec{u} = -\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ศูนย์ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ คือ $\vec{0}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (เวกเตอร์ศูนย์ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์)

การคูณเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ ด้วยสเกลาร์

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใดๆ

กำหนดให้ $\vec{u}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ $\quad \therefore \alpha\vec{u} = \alpha\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{bmatrix}$

การเท่ากันของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ “ขนาด” และ “ทิศทาง” เหมือนกัน กำหนดให้

$\vec{u}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix},\vec{v}=\begin{bmatrix}d\\e\\f\end{bmatrix}$ ถ้า $\vec{u}=\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d\\e\\f\end{bmatrix}$ นั้นคือ $a=d\,,b=e\,,c=f$

ตัวอย่างที่ 20 จงหาค่า x , y และ z ที่ทำให้ $\begin{bmatrix}x\\x+y\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\z\\x+z\end{bmatrix}$

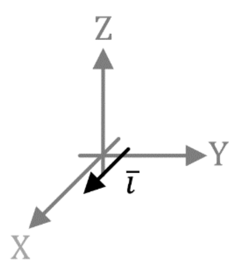
เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกน X แกน Y และแกน Z

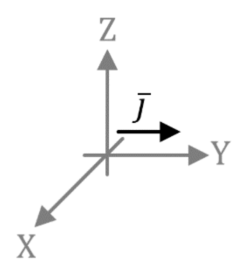
เวกเตอร์หนึ่งหน่วยคือเวกเตอร์ที่**มีขนาดหนึ่งหน่วย** ไม่ว่าเวกเตอร์นั้นจะมีทิศทางใดก็ตาม

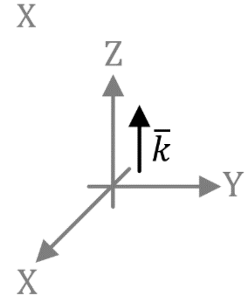
กำหนดให้ $\vec{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกน X

กำหนดให้ $\vec{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกน Y

กำหนดให้ $\vec{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกน Z







เราสามารถเขียนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ในรูปของ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ได้ดังนี้ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

ตัวอย่างที่ 21 จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} =$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ และ $\vec{u} \neq \vec{0}$ แล้ว

เวกเตอร์ **<u>หนึ่งหน่วย</u>** ที่มี**<u>ทิศเดียว</u>**กับ $\vec{u}$ คือ $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ **<u>k หน่วย</u>** ที่มี**<u>ทิศเดียว</u>**กับ $\vec{u}$ คือ $\frac{k}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{k}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

***** ถ้าอยากได้ทิศตรงข้าม ให้คูณด้วย -1 เข้าไป**

ตัวอย่างที่ 22 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศเดียวกับ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 23 จงหาเวกเตอร์ 5หน่วย ในทิศเดียวกับเวกเตอร์ที่ชี้จาก**จุดA(2,-1,0)** ไปยัง**จุดB(0,-2,3)**

ตัวอย่างที่ 24 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ที่ขนานกับกับเวกเตอร์ที่ชี้จาก**จุดA(0,1,-1)** ไปยัง**จุดB(-2,1,1)**

ตัวอย่างที่ 25 ให้จุด A(0,-1,1) , B(1,1,1) และ C(3,5,-1) เป็นจุดในปริภูมิสามมิติ จงหา $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

ตัวอย่างที่ 26 จงหา a , b ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$\begin{bmatrix} a \\ 3 \end{bmatrix}$ ขนานกับ $\begin{bmatrix} 6 \\ -9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ มีทิศทางตรงกันข้าม $\begin{bmatrix} -4 \\ 4a \\ ab \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 27 ให้ $\vec{u}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}=2\vec{j}-\vec{k}$ จงหาเวกเตอร์ที่ยาวเท่ากับ $\vec{v}$ และมีทิศทางตรงข้าม กับ $\vec{u}-\vec{v}$

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงเขียนเวกเตอร์ในรูปของ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1.1 จาก **(0,-1)** ไปยัง **(5,0)**

1.2 จาก **(-1,3,1)** ไปยัง **(0,0,0)**

1.3 จาก **(0,1,-1)** ไปยัง **(-2,1,1)**

1.4 จาก $(\sqrt{2}\ ,\ -\frac{1}{2})$ ไปยัง $(0\ ,\ \frac{3}{2})$

1.6 จาก **(10,2,-3)** ไปยัง **(4,3,7)**

1.7 จาก **(3,5,7)** ไปยัง **(-1,-2,3)**

1.8 จาก **(-1,2,-6)** ไปยัง **(2,-6,8)**

1.9 จาก $(-1, \frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ ไปยัง $(2, -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{8})$

1.10 จาก $(\frac{3}{4},\ 2,\ -3)$ ไปยัง $(-1, \frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{2})$

2. จงหาพิกัดของจุดต่อไปนี้ จากเงื่อนไขที่กำหนดให้

2.1 กำหนด $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $A(2, -2, 4)$ จงหา B

2.2 กำหนด $\overrightarrow{CD}=\begin{bmatrix}0\\6\\-5\end{bmatrix}$ และ $C(1,-2,2)$ จงหา D

2.3 กำหนด $\overrightarrow{EF}=\begin{bmatrix}-3\\3\\6\end{bmatrix}$ และ $F(4,-5,-3)$ จงหา E

2.4 กำหนด $\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}$ และ $Q(5,6,-7)$ จงหา P

3. จงหาเวกเตอร์ต่อไปนี้

3.1 $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix} =$

3.2 $\begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} =$

3.3 $\begin{bmatrix} 16 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} =$

3.4 $\begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 19 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix} =$

3.5 กำหนด $A(7,3,-1)$, $B(3,-3,4)$, $C(2,2,-2)$ จงหา $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{AC}$

4. กำหนด $\vec{u}=\begin{bmatrix}3\\-4\\5\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$, $\vec{w}=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}$ จงหา

4.1 $2\vec{u}+3\vec{v}$

4.2 $3\vec{v}-2\vec{w}$

4.3 $\vec{u}-4\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$

4.4 $3\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}$

5. เวกเตอร์ต่อไปนี้เวกเตอร์ใดบ้างที่ขนานกัน

$$\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6. จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

6.1 $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$

6.2 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

6.3 $\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

6.4 $\begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

6.5 $\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$

6.6 $\begin{bmatrix} 2 \\ -\sqrt{5} \\ 4 \end{bmatrix}$

7. กำหนด $\overrightarrow{AB} = -5\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = -\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ จงหา $\left|\overrightarrow{BC}\right|$

8. $\vec{u} = -3\vec{i} + a\vec{j} + 2\vec{k}$ และ $\left|\vec{u}\right| = 7$ จงหา a

9. จงหาเวกเตอร์ที่ยาว 2 หน่วย ในทิศเดียวกับ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

10. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศเดียวกับเวกเตอร์ $-8\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$

11. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $7\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$

12. จงหาค่า a เมื่อกำหนดให้ $2\vec{i}+a\vec{j}+\frac{5}{2}\vec{k}$ ขนานกับ $-5\vec{i}+\frac{5}{2}\vec{j}-\frac{25}{4}\vec{k}$

13. กำหนด A , B , C เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม P เป็นจุดกึ่งกลางของ AC Q อยู่บน AB ทำให้ AQ : QB = 1 : 2 ถ้า $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} - 3\vec{j}$ และ $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ จงหา $\overrightarrow{PQ}$ **[PAT1 (ธ.ค.54)/13]**

14. กำหนด $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ ถ้า $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j}$ โดยที่ $\vec{w}$ มีทิศเดียวกับ $\vec{u}$ และ $|\vec{w}| = 10$ แล้ว $a+b$ เท่ากับเท่าใด **[A-NET 49/2-4]**

15. กำหนดให้ A(a,b) , B(4,-6) และ C(1,-4) เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า P เป็นจุดบนด้าน AB ซึ่งอยู่ห่างจากจุด A เท่ากับ $\frac{3}{5}$ ของระยะระหว่าง A และ B และเวกเตอร์ $\overrightarrow{CP} = \vec{i} + 2\vec{j}$ แล้ว $a+b$ เท่ากับเท่าใด

การคูณระหว่างเวกเตอร์กับเวกเตอร์

การคูณเวกเตอร์กับเวกเตอร์สามารถทำได้ 2 แบบ

แบบแรก เรียกว่า **“ผลคูณเชิงสเกลาร์”** Dot Product

แบบที่สอง เรียกว่า **“ผลคูณเชิงเวกเตอร์”** Cross Product

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Dot Product)

การดอท คือ การคูณระหว่างเวกเตอร์กับเวกเตอร์ **ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็น “จำนวนจริง” (ตัวเลข)** ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ อ่านว่า ยูดอทวี ซึ่งจะหาได้จาก

ในระบบพิกัดฉาก **2 มิติ** $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$

ในระบบพิกัดฉาก **3 มิติ** $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

ตัวอย่างที่ 28 จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$
2. $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} =$
3. $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$
4. $\begin{bmatrix} -2 \\ -12 \\ 41 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$
5. $(\vec{i}+2\vec{j})\cdot(-\vec{i}-\vec{j}) =$
6. $(2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})\cdot(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) =$

สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ (Dot Product)

กำหนด $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ และ a เป็นจำนวนจริง

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ สมบัติสลับที่
2. สำหรับ $\vec{u}$ ใดๆ $\vec{u}\cdot\vec{u}\ge 0$
3. $\vec{u}\cdot\vec{u}=0 \quad \therefore \vec{u}=\vec{0}$
4. $\vec{u}\cdot\vec{u}=\left|\vec{u}\right|^2$
5. $(a\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(a\vec{v}) = a(\vec{u}\cdot\vec{v})$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
6. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\pm\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{v})\pm(\vec{u}\cdot\vec{w})$ สมบัติการแจกแจง
7. ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ แล้ว $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta$
8. ถ้า $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ แสดงว่า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$

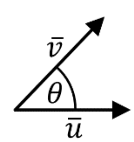
สิ่งที่ต้องระวัง คือ การดอทนั้นเป็นการคูณระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์ และผลลัพธ์ที่ได้เป็นจำนวนจริง (ตัวเลข) ดังนั้น เราไม่สามารถนำเวกเตอร์สามเวกเตอร์มาดอทกันได้ เพราะว่าการดอทเวกเตอร์สองตัวแรก ผลลัพธ์คือจำนวนจริง และเราไม่สามารถนำจำนวนจริงมาดอทกับเวกเตอร์อีกตัวได้ เนื่องจากการดอทคือการกระทำระหว่างเวกเตอร์กับเวกเตอร์ นั้นคือไม่สามารถทำเช่นนี้ได้ $\vec{u}\cdot\vec{v}\cdot\vec{w}$

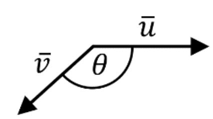
แต่เราสามารถทำแบบนี้ได้ $(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$ นั้นคือการคูณเวกเตอร์ด้วยตัวเลขตามปกติที่เคยเรียนมา

ในกรณีที่โจทย์ให้มุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มา เราสามารถหา $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ได้จาก $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta}$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เมื่อเอา**จุดตั้งต้นของมาต่อกัน**

จะเห็นว่า จะไม่มีทางเกิน 180° (เพราะถ้าเกิน ก็ให้วัดจากอีกฝั่งที่มุมเล็กกว่า)





จากสมบัติที่ว่า $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta$ หากเราพิจารณาจะพบว่า

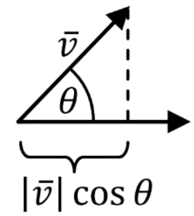
ในกรณีที่ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ นั้นคือ $\theta=90^\circ$ **ดังนั้น** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos 90^\circ=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|0=0$

ในกรณีที่ $\vec{u}$ มีทิศทางเดียวกันกับ $\vec{v}$ นั้นคือ $\theta=0^\circ$ **ดังนั้น** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos 0^\circ=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|1=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|$

ในกรณี $\vec{u}$ มีทิศตรงข้ามกับ $\vec{v}$ จะได้ $\theta=180^\circ$ **ดังนั้น** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos 180^\circ=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|(-1)=-\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|$

จากเรื่องตรีโกณมิติ เราสามารถหา “ระยะเงา” ของ $\vec{v}$ บน $\vec{u}$ ได้จาก $|\vec{v}|\cos\theta$

และจาก $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ ดังนั้น ระยะเงา $=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}$



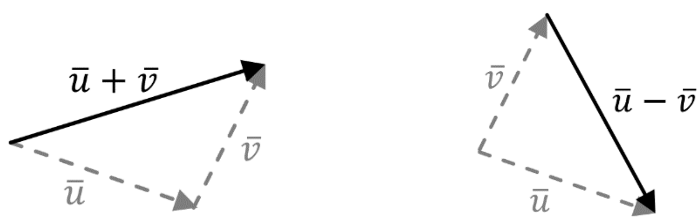
ตัวอย่างที่ 29 สี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD มี AB = 5 , BC = 2 และมุม A = 60° จงหา $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CB}$

ตัวอย่างที่ 30 $\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}$ ตั้งฉากกันหรือไม่

ตัวอย่างที่ 31 จงหาขนาดของมุมที่ $-\sqrt{3}\vec{i}+3\vec{j}$ กระทำกับ $\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}$

ตัวอย่างที่ 32 จงหาขนาดของมุมที่ $-\sqrt{3}\vec{i}+3\vec{j}$ กระทำกับแกน Y

จาก"กฎของโคไซน์" เราสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับเวกเตอร์ได้ เนื่องจาก $\vec{u}\pm\vec{v}$ สามารถประกอบกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นรูปสามเหลี่ยมได้



ถ้าเราใช้กฎของโคไซน์ กับสามเหลี่ยมเหล่านี้ ร่วมกับสูตร $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ เราจะได้สูตรออกมาดังนี้

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

และถ้าเรานำสูตรทั้งสองมาบวกลบกัน ก็จะได้สูตรมาอีกสองสูตร ดังนี้

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=2|\vec{u}|^2+2|\vec{v}|^2$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2-|\vec{u}-\vec{v}|^2=4\vec{u}\cdot\vec{v}$$

ตัวอย่างที่ 33 กำหนด $\left|\vec{u}\right| = 3$, $\left|\vec{v}\right| = 5$, $\left|\vec{u} - \vec{v}\right| = 4$ จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$

ตัวอย่างที่ 34 กำหนด $\left|\vec{u}\right| = 2$, $\left|\vec{v}\right| = 5$, $\left|\vec{u} + \vec{v}\right| = 4$ จงหา $\left|\vec{u} - \vec{v}\right|$

ตัวอย่างที่ 35 กำหนด $\left|\vec{u}\right| = 3$, $\left|\vec{v}\right| = 1$ และ $\vec{u}$ ทำมุม 60° กับ $\vec{v}$ จงหา $\left|2\vec{u} - \vec{v}\right|$

แบบฝึกหัดที่ 5

1. จงหา $\vec{u}\cdot\vec{v}$ เมื่อกำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ดังต่อไปนี้

1.1 $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}$ และ $\vec{v}=2\vec{i}+5\vec{j}$

1.2 $\vec{u}=4\vec{i}-3\vec{j}$ และ $\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}$

1.3 $\vec{u}=6\vec{i}-4\vec{j}$ และ $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$

1.4 $\vec{u}=5\vec{i}+3\vec{j}$ และ $\vec{v}=3\vec{i}-5\vec{j}$

1.5 $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ และ $\vec{v}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

1.6 $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ และ $\vec{v}=-2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$

1.7 $\vec{u}=-6\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$ และ $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

1.8 $\vec{u}=-2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ และ $\vec{v}=-3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$

1.9 $\vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

1.10 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

1.11 $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ และ $\vec{v} = 2\vec{j} - \vec{i}$

1.12 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \vec{i} - \vec{k}$

2. เวกเตอร์ในข้อใด ตั้งฉากกัน

2.1 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.2 $\vec{i}-\vec{j}$ กับ $\vec{i}+\vec{j}$

2.3 $\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}$ กับ $\sqrt{3}\vec{i}-\sqrt{2}\vec{j}$

2.4 $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ กับ $\vec{i}-2\vec{k}$

2.5 $\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix}8\\ -6\end{bmatrix}$

2.6 $5\vec{i}-4\vec{j}$ กับ $4\vec{i}+5\vec{j}$

2.7 $\frac{3}{4}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}$ กับ $\frac{4}{3}\vec{i}-\frac{3}{2}\vec{j}$

3. จงหา x ที่ทำให้เวกเตอร์ต่อไปนี้ ตั้งฉากกัน

3.1 $\begin{bmatrix} x \\ 6 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

3.2 $\begin{bmatrix} x \\ 5 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$

3.3 $\begin{bmatrix} 6 \\ x \\ 3 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 10 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix}$

3.4 $\begin{bmatrix} x \\ -2 \\ x+5 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} x-3 \\ x+1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. กำหนด $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบสองมิติ โดย $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ และ $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\vec{u}$ และตั้งฉากกับ $\vec{v}$

5. กำหนด $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบสองมิติ โดย $\vec{u} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ และ $\vec{v} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\vec{u}$ และตั้งฉากกับ $\vec{u} + \vec{v}$

6. จงหาสมการเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (1,2) และขนานกับเวกเตอร์ $3\vec{i} - 4\vec{j}$ ในระบบสองมิติ

7. จงหาสมการเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (2,-3) และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $3\vec{i} + 4\vec{j}$ ในระบบสองมิติ

8. กำหนด $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ และ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ จงหา $|\vec{u} - \vec{v}|$

9. กำหนด $|\vec{u}| = 15$, $|\vec{v}| = 8$ และ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ จงหา $|\vec{u} + \vec{v}|$

10. กำหนด $\vec{u} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$ จงหา $|\vec{u} - \vec{v}|$

11. กำหนด $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ และ $\vec{u}$ ทำมุม 60° กับ $\vec{v}$ จงหา

11.1 $|\vec{u} + \vec{v}|$

11.2 $|\vec{u} - \vec{v}|$

11.3 $\left|\vec{u}+2\vec{v}\right|$

11.4 $\left|2\vec{u}-3\vec{v}\right|$

12. กำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ โดยที่ $\left|\vec{u}\right|=1$, $\left|\vec{v}\right|=3$ และ $\vec{u}$ ทำมุม 60° กับ $\vec{v}$

ค่าของ $\dfrac{\left|\vec{u}+\vec{v}\right|}{\left|2\vec{u}-\vec{v}\right|}$ เท่ากับเท่าใด **[PAT1 (มี.ค 54)]/15]**

13. กำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ โดยที่ $\vec{u}=i+\sqrt{3}\,\vec{j}$, $\left|\vec{v}\right|=3$ และ $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|=4$

ค่าของ $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$ เท่ากับเท่าใด **[PAT1 (ก.ค 53)]/16]**

14. กำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย ถ้าเวกเตอร์ $\vec{u}+2\vec{v}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $2\vec{u}+\vec{v}$ แล้ว $\vec{u}\cdot\vec{v}$ เท่ากับเท่าใด **[PAT1 (มี.ค 52)]/25]**

15. กำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย ถ้าเวกเตอร์ $3\vec{u}+\vec{v}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{u}+\overrightarrow{3v}$ แล้วเวกเตอร์ $5\vec{u}-\vec{v}$ มีขนาดเท่ากับเท่าใด **[PAT1 (ก.ค 52)]/24]**

16. กำหนด $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง **[PAT1 (ต.ค 53)]/15]**
   1. $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \geq (\vec{u}\cdot\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{v})$
   2. ถ้า $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \left(|\vec{u}||\vec{v}|\right)^2$ แล้ว $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$
   3. ถ้า $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=4$ และ $|\vec{w}|=7$ แล้ว $\vec{u}\cdot\vec{v}=12$
   4. $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$

17. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง **[PAT1 (มี.ค 55)]/14]**

1. $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2 < \left|\vec{u}\right|^2 - \left|\vec{v}\right|^2$
2. ถ้า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ แล้ว $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2$

18. กำหนดให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง **[PAT1 (ต.ค 58)]/27]**

1. ถ้า $\vec{a}$ ขนานกับ $\vec{b}$ แล้ว $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|$
2. ถ้า $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2$ แล้ว $\vec{a}$ ตั้งฉากกับ $\vec{b}$
3. ถ้าเวกเตอร์ $\vec{a}+\vec{b}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{a}-\vec{b}$ แล้ว $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$

19. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ซึ่ง $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ และ $\vec{u}+\vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}-\vec{v}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง **[PAT1 (ต.ค 52)]/1-13]**

1. $|\vec{u}|=|\vec{v}|$
2. $\vec{u}+2\vec{v}$ ตั้งฉากกับ $2\vec{u}-\vec{v}$

20. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่ง $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\neq|\vec{u}||\vec{v}|$ ถ้า $a(\vec{v}-2\vec{u})+3\vec{u}=b(2\vec{u}+\vec{v})$ แล้วค่าของ a อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ **[PAT1 (ก.ค 52)]/25]**

1. $\left[0,\frac{1}{2}\right)$
2. $\left[\frac{1}{2},1\right)$
3. $\left[1,\frac{3}{2}\right)$
4. $\left[\frac{3}{2},2\right)$

21. กำหนด $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ และ x, y เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ และ $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$ ถ้า $\left|\vec{u} - \vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2$ และ $5x + 5y = 21$ แล้วค่าของ $\vec{u} \cdot \vec{w}$ เท่ากับเท่าใด **[PAT1 (ต.ค 53)]/14]**

22. ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ กำหนดโดย $\vec{a} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - 3p\vec{k}$ และ $\vec{b} = -2p\vec{i} + 2\vec{j} + p\vec{k}$ เมื่อ p เป็นจำนวนจริง ถ้า $\vec{a}$ ตั้งฉากกับ $\vec{b}$ และขนาดของ $\vec{b}$ เท่ากับ 3 แล้วค่าของ p อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ **[PAT1 (มี.ค 53)]/14]**

1. $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ 2. $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 3. $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 4. $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$

23. กำหนดให้ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์บนระนาบซึ่งกำหนดโดย $\vec{a} = x\vec{i} + \frac{12}{5}\vec{j}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + y\vec{j}$ และ $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j}$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง ถ้า $\left|\vec{b} - \vec{c}\right| = 5$ เวกเตอร์ $\vec{a}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{b}$ และ $\vec{a} \cdot \vec{c} > 0$ แล้วค่าของ $\left|5\vec{a} + \vec{b}\right|^2$ เท่ากับเท่าใด **[PAT1 (มี.ค 56)]/45]**

24. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง **[PAT1 (มี.ค 56)]/15]**

1. ให้เวกเตอร์ $\overrightarrow{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง และให้เวกเตอร์ $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ และ $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ถ้าเวกเตอร์ $\overrightarrow{w}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{u}$ และเวกเตอร์ $\vec{v}$ แล้ว $a + b + c = 1$
2. ให้เวกเตอร์ $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ และ $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ ถ้า $\left|\vec{v}\right| = \frac{3}{\sqrt{5}}$ และ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ แล้วเวกเตอร์ $\vec{u}$ ทำมุม 60° กับเวกเตอร์ $\vec{v}$

25. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ด้าน AB ยาว 5 หน่วย ด้าน BC ยาว 12 หน่วย และมุม $A\hat{B}C$ เท่ากับ 60° ถ้าเวกเตอร์ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ เวกเตอร์ $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ และเวกเตอร์ $\vec{w}=\overrightarrow{CA}$ แล้ว $(2\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{w}$ เท่ากับเท่าใด **[PAT1 (พ.ย 57)]/12]**

26. กำหนดให้ จุด $A(-1,1)$, $B(2,5)$ และ $C(2,-3)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด A และจุด B ลากส่วนของเส้นตรง $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับเส้นตรง L ที่จุด D แล้วเวกเตอร์ $\overrightarrow{AD}$ เท่ากับเท่าใด **[PAT1 (มี.ค 55)]/12]**

27. กำหนด $\vec{u} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ และ $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ ให้ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ โดยที่ $\vec{u} \cdot \vec{w} = -11$ และ $\vec{v} \cdot \vec{w} = 8$ ถ้า θ เป็นมุมแหลมที่เวกเตอร์ $\vec{w}$ ทำมุมกับเวกเตอร์ $5\vec{i} + \vec{j}$ แล้ว $\tan\theta + \sin 2\theta$ เท่ากับเท่าใด [PAT1 (ก.ค 53)]/32]

28. กำหนดให้ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่ง $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 5$, $\left|\vec{b} + \vec{c}\right| = 3$ และ $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{10}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT1 (เม.ย 57)]/14]

29. กำหนดให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์บนระนาบซึ่ง $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}=8$ และ $\vec{v}\cdot\vec{w}=-2$ ถ้าเวกเตอร์ $\vec{w}$ ทำมุม $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ กับเวกเตอร์ $\vec{u}$ แล้วค่าของ $\left|\vec{u}\right|^2+\left|\vec{v}\right|^2$ เท่ากับเท่าใด **[PAT1 (ต.ค 55)]/15***

30. กำหนดให้ $\overrightarrow{A}$ และ $\overrightarrow{B}$ เป็นเวกเตอร์บนระนาบ โดยที่ $\overrightarrow{A}=16\vec{i}+a\vec{j}$ และ $\overrightarrow{B}=8\vec{i}+b\vec{j}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $\left|\overrightarrow{A}\right|=\left|\overrightarrow{B}\right|$ และเวกเตอร์ $\overrightarrow{B}$ ทำมุม 60° กับเวกเตอร์ $\overrightarrow{A}$ แล้วค่าของ $(a+b)^2$ เท่ากับเท่าใด **[PAT1 (ต.ค 58)]/16]**

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Cross Product)

การครอสส คือ การคูณระหว่างเวกเตอร์กับเวกเตอร์ **ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็น "เวกเตอร์"** โดยการครอสส สามารถทำได้กับ**เวกเตอร์ในระบบสามมิติเท่านั้น**

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u} \times \vec{v}$ อ่านว่า ยูครอสวี ซึ่งจะหาได้จาก

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 36 $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$

ตัวอย่างที่ 37 $(-\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) \times (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) =$

จะสังเกตว่าการครอสเวกเตอร์จะคล้ายๆ กับการหาdet ในเรื่องเมทริกซ์ เราสามารถครอสเวกเตอร์อีกวิธี

ได้จาก $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$

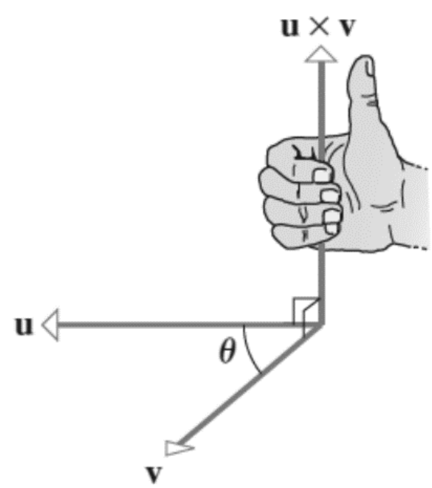
ตัวอย่างที่ 38 $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$

สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Cross Product)

กำหนด $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ และ a เป็นจำนวนจริง

1. $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$
2. $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$
3. ถ้า $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ แล้ว $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$; $\vec{u}\neq\vec{0},\vec{v}\neq\vec{0}$
4. $(a\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(a\vec{v}) = a(\vec{u}\times\vec{v})$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
5. $\vec{u}\times(\vec{v}\pm\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})\pm(\vec{u}\times\vec{w})$ สมบัติการแจกแจง
6. ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ แล้ว $\boxed{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\theta}$

อย่างที่เรารู้ว่าการครอส **ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็น "เวกเตอร์"** ดังนั้น ก็ต้องมีทิศทาง โดยเราจะหาทิศทางของ $\vec{u}\times\vec{v}$ ได้จากการใช้มือขวา (ชี้ตามตัวตั้ง กำตามตัวครอส **ทิศ**คือ **นิ้วโป้ง**) ตามภาพ



ตัวอย่างที่ 39 ให้ $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ และ $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ ถ้าให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ จงหา $\sin\theta$

ตัวอย่างที่ 40 $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์อยู่บนระนาบ XY และทำมุมกัน 30° โดยที่ $\vec{u}$ ชี้ไปตามแกน X ทางบวก และชี้ไปทาง X, Y มีค่าเป็นบวกทั้งคู่ ถ้า $|\vec{u}| = 2$ และ $|\vec{v}| = 1$ จงหาขนาดและทิศทางของ $\vec{u} \times \vec{v}$

ตัวอย่างที่ 41 $\vec{s}$ และ $\vec{t}$ เป็นเวกเตอร์อยู่บนระนาบ XY และทำมุมกัน 90° โดยที่ $\vec{s}$ ชี้ไปตามแกน Y ทางลบ และ $\vec{t}$ ชี้ไปตามแกน Z ทางบวก ถ้า $|\vec{s}| = |\vec{t}| = 3$ จงหาขนาดและทิศทางของ $\vec{s} \times \vec{t}$

แบบฝึกหัดที่ 6

1. จงหา $\vec{u} \times \vec{v}$ เมื่อกำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ดังต่อไปนี้

   1.1 $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ และ $\vec{v} = \vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$

   1.2 $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ และ $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

   1.3 $\vec{u} = 7\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ และ $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

1.4 $\vec{u} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ และ $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

1.5 $\vec{u} = 8\vec{i} - 2\vec{k}$ และ $\vec{v} = 2\vec{j} - \vec{k}$

2. จงหาผลครอสต่อไปนี้

2.1 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} =$

2.2 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} =$

2.3 $(\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) \times (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$

2.4 $(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \times (4\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k})$

3. เวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เวกเตอร์คู่ใดที่ขนานกัน (กำหนดให้ใช้ความรู้เรื่องผลคูณเชิงเวกเตอร์)

   3.1 $3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ กับ $9\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$

   3.2 $6\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ กับ $6\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

   3.3 $6\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ กับ $-3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

   3.4 $3\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$ กับ $-3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$

   3.5 $-8\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ กับ $3\vec{i}-\frac{3}{4}\vec{j}-\frac{3}{8}\vec{k}$

4. ถ้า $\frac{3}{2}\vec{i}+x\vec{j}-\vec{k}$ ขนานกับ $-4\vec{i}-9\vec{j}+\frac{8}{3}\vec{k}$ จงหา x

5. ถ้า $20x\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ ขนานกับ $-5\vec{i}-x\vec{j}+\frac{3}{2}\vec{k}$ จงหา x

6. กำหนด $A(1,2,3), B(2,3,1)$ และ $C(2,4,2)$ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{AC}$ แล้ว จงหาค่า $\sin\theta$

7. กำหนด $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$ และ $\vec{v}=-2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\vec{u}$ และตั้งฉากกับ $\vec{v}$

8. กำหนด $\vec{u}=5\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ และ $\vec{v}=-2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$ จงหามุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

9. $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย และมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เท่ากับ 135° จงหา $|\vec{u}\times\vec{v}|$

10. กำหนด $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ และ $|\vec{u}\times\vec{v}| = 12$ จงหามุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

11. กำหนดเวกเตอร์ $\vec{u} = a\vec{i} + 2\vec{j} + b\vec{k}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $|\vec{u}\times\vec{j}| = 2$ แล้ว $|\vec{u}|^2$ เท่ากับเท่าใด **[PAT1 (เม.ย 57)26]**

12. ให้ $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + 2\vec{k}$ และ $\vec{v} = 2a\vec{i} - 3b\vec{j}$ โดยที่ a,b เป็นจำนวนเต็มบวก และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ถ้า $\left|\vec{u}\right| = 3$ และ $\cos\theta = \frac{1}{3}$ แล้ว $\vec{u} \times \vec{v}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด **[A-NET 50/1-10]**

13. ให้เวกเตอร์ $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ เมื่อ a,b และ c เป็นจำนวนจริง และให้เวกเตอร์ $\vec{u} = \vec{i} - \vec{k}$ และ $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ถ้าเวกเตอร์ $\vec{v}$ มีทิศเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{u} \times \vec{w}$ และขนาดของเวกเตอร์ $\vec{v}$ เท่ากับ $6\sqrt{2}$ หน่วย แล้วค่าของ $a - b + c$ เท่ากับเท่าใด [PAT1(ต.ค 59)/32]

14. กำหนดให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์โดยที่ $\vec{a}\cdot\vec{b}=15$, $|\vec{a}|=6$ และ $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=32$
ค่าของ $|\vec{a}-2\vec{b}|$ เท่ากับเท่าใด **[PAT1(ต.ค 59)/24]**

15. ให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์อยู่บนระนาบเดียวกัน
โดยที่ $\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}$, $|\vec{u}|=\sqrt{2}\,|\vec{w}|$ และ $|\vec{v}|=\sqrt{3}\,|\vec{w}|$ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$
แล้ว $\sin\theta$ เท่ากับเท่าใด **[PAT1(มี.ค 60)/6]**

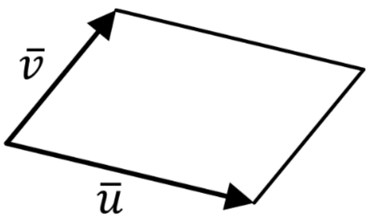
16. กำหนดให้เวกเตอร์ $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ ถ้า $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ โดยที่ $(\vec{b}+\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=10$ และเวกเตอร์ $\vec{a}$ ทำมุม 60° กับเวกเตอร์ $\vec{b}$ แล้วจงหาขนาดของเวกเตอร์ $\vec{a}\times\vec{b}$ **[PAT1(ก.พ 61)/11]**

17. ให้ $\vec{a},\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ โดยที่ $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+3\sqrt{2}\vec{k}$ เวกเตอร์ $\vec{c}$ ทำมุม 45° และ 60° กับเวกเตอร์ $\vec{a}$ และเวกเตอร์ $\vec{j}$ ตามลำดับ และ $\vec{c}\cdot\vec{k}>0$ ถ้า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{c}$ แล้ว $\vec{u}\cdot\vec{b}$ เท่ากับเท่าใด **[PAT1(ก.พ 61)/44]**

18. กำหนดให้ $\vec{a},\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ โดยที่ $\vec{a}+\vec{b}=t\vec{c}$ โดยที่ t เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $|\vec{b}|=|\vec{a}|^2$, $|\vec{c}|=\sqrt{2}$ และ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=9$ แล้วค่าของ t เท่ากับเท่าใด **[PAT1(มี.ค 59)/44]**

19. ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ถ้า $\vec{a}+\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย แล้วขนาดของเวกเตอร์ $\vec{a}\times\vec{b}$ เท่ากับเท่าใด **[PAT1(ก.พ 62)/23]**

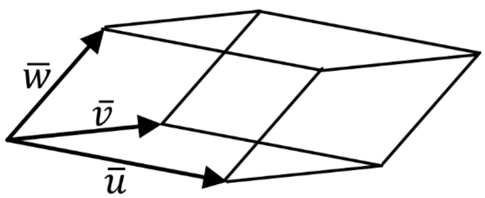
เวกเตอร์กับพื้นที่และปริมาตร



สี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจาก เวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ดังรูป

จะมีพื้นที่ $= \left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \left|\vec{v} \times \vec{u}\right|$ **ตารางหน่วย**

จะเห็นเราจะต้องใช้การครอสเวกเตอร์ และการครอวเวกเตอร์นั้นสามารถคอรสได้เฉพาะเวกเตอร์ในสามมิติเท่านั้น หากว่า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในสองมิติ เราสามารถทำให้เป็นสามมิติได้โดย **เติม 0 ลงไปเป็นค่าทางแกน** Z



ทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจากเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ ดังรูป

จะมีปริมาตร $= \left|\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)\right|$ **ลูกบาศก์หน่วย**

เทคนิคการจำ!!! เอาพื้นที่ไปดอทกับความสูง

โดยเราจะใช้พื้นที่จากเวกเตอร์สองตัวไหนก็ได้ และเวกเตอร์ที่เหลือก็คือความสูง ค่าที่ได้จะเท่ากันเสมอ

ตัวอย่างที่ 42 จงหาพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ซึ่งมีพิกัด A(3,4) B(-1,2) C(1,-1)

ตัวอย่างที่ 43 จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจาก $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{k}$ และ $\vec{w} = \vec{j} - \vec{k}$

นอกจากนี้เรายังสามารถตรวจสอบ “ระนาบ” ของเวกเตอร์ได้ จะเห็นว่า ถ้า $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน แล้วจะทำให้รูปทรงของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจากเวกเตอร์ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ จะกลายเป็นแผ่นแบบราบ ซึ่งทำให้ปริมาตร = 0

$\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)=0$

ตัวอย่างที่ 44 จงตรวจสอบว่า $\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, $2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ และ $3\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ อยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่

แบบฝึกหัดที่ 7

1. จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจากเวกเตอร์ต่อไปนี้

1.1 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

1.2 $\vec{i}+\vec{j}$ และ $\vec{i}-\vec{j}$

2. จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจากเวกเตอร์ต่อไปนี้

2.1 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

2.2 $\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{j}+\vec{k}$ และ $\vec{i}+\vec{k}$

3. เวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้ อยู่บนระนาบเดียวกัน

3.1 $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

3.2 $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ และ $-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

4. กำหนดให้ $A(1,0,-2)$, $B(0,-1,0)$, $C(2,1,-1)$ จงหาพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจาก $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$

5. กำหนดให้ $A(-2,1,1)$, $B(2,2,-1)$, $C(1,1,0)$ จงหาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC

6. ถ้ารูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจาก $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ มีปริมาตรเท่ากับ 3 แล้วจงหา x

7. กำหนด $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง **[PAT1(มี.ค 57)/13]**

   1. $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)=\vec{w}\cdot\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)$

   2. ถ้า $\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{w}\right|$, $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|=\left|\vec{v}+\vec{w}\right|$ และเวกเตอร์ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{v}$ แล้วเวกเตอร์ $\vec{v}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{w}$

8. กำหนดให้ $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{k}$

   $\vec{v}=2\vec{j}+x\vec{k}$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

   และ $\vec{w}=-3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

   ถ้า $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ อยู่บนระนาบเดียวกันแล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด **[A-NET 49/1-13]**

9. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยมี A,B **และ** C เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ให้ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ และ $\vec{c} = \overrightarrow{CA}$ ถ้า $\vec{a} \cdot \vec{b} = -15$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = -21$ และ $\vec{c} \cdot \vec{a} = -10$ แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด **[PAT1(มี.ค 60)/13]**